数理解析研究所講究録
197巻 1974年 113-122

共分散行列に関する検定の仮説の近傍での漸近展開について

熊本大学教養部 長尾寿夫

1. 序

多次元正規分布の共分散行列Σに関する次の仮説検定問題を取り扱う。

(i) 仮説 $H_1: \Sigma=\Sigma_0$ 対立仮説 $K_1: \Sigma \neq \Sigma_0$ (ii) $H_2: \Sigma=\sigma^2 I$ $K_2: \Sigma \neq \sigma^2 I$ (iii) $H_3: \Sigma=\Sigma_D$ $K_3: \Sigma\neq\Sigma_D$ (iv) $H_4: \Sigma_1=\cdots=\Sigma_k(=\Sigma)$ $K_4: \Sigma_i\neq\Sigma_j$ $(i\neq j)$. ここでΣ_D は, 次の行列である。

$$(1.1) \qquad \Sigma_D=\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_{gg} \end{pmatrix}.$$

これに対する尤度比検定をλとしたとき, 対立仮説の下での漸近展開は, (i),(ii) に対しては, Sugiura[9], (iii),(iv) に対しては, Nagao[7], [6]によって求められた。その第一項は, 正規分布となり, 仮説の下では, その分散は0となる。このことよりNagao[8]は, (i)〜(iv) に対する検定基準をあたえ

仮説の下での漸近展開を求めた。ここではそれらの検定と(iii), (iv)に対する尤度比検定の仮説の近傍での漸近展開を取り扱う．（ただし n^{-1} の項は，省略）．

2．検定統計量

$X_1, X_2, \cdots, X_N$ を p 次元正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ からの標本とする．このとき(i)に対して，

$$(2.1) \qquad T_1 = \frac{n}{2} \mathrm{tr}(S\Sigma_0^{-1}/n - I)^2$$

ただし $S = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})'$, $n = N-1$.

(ii)に対しては，

$$(2.2) \qquad T_2 = \frac{p^2 n}{2} \mathrm{tr}\left\{\frac{S}{\mathrm{tr}S} - p^{-1}I\right\}^2 .$$

この検定は，別の観点より John [3] と Sugiura[10]により，locally best invariant test であることが示されている。

(iii)に対しては，

$$(2.3) \qquad T_3 = \frac{n}{2} \mathrm{tr}(SS_D^{-1} - I)^2 ,$$

ただし

$$(2.4) \qquad S_D = \begin{pmatrix} s_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_{pp} \end{pmatrix} .$$

特に，$g=2$ のとき，$T_3 = n\,\mathrm{tr}\,S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1}$ となり，Pillai 統計量となる。 (iv) に対しては，

$$(2.5)\quad T_4 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha \mathrm{tr}\left\{\frac{S_\alpha}{n_\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k} S_\alpha\right)^{-1} - I\right\}^2$$

ただし $S_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha}(X_{\alpha\beta}-\bar{X}_\alpha)(X_{\alpha\beta}-\bar{X}_\alpha)'$，$n_\alpha = N_\alpha - 1$，$n=\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha$.

また(iii)に対する尤度比検定は，

$$(2.6)\quad \lambda_3 = \frac{|S|^{\frac{N}{2}}}{\prod_{\alpha=1}^{g}|S_{\alpha\alpha}|^{\frac{N}{2}}}.$$

(iv)に対する尤度比検定は，

$$(2.7)\quad \lambda_4 = \frac{\prod_{\alpha=1}^{k}|S_\alpha/n_\alpha|^{n_\alpha/2}}{\left|\sum_{\alpha=1}^{k} S_\alpha/n\right|^{n/2}}$$

3．準備

$S(p\times p)$ を Wishart 分布 $W(\Sigma, n)$ とする。このとき次の補題をえる。

補題 1．$\Sigma = I + n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で，$Y=\sqrt{\frac{n}{2}}(\log S/n - \log\Sigma)$ は，漸近的に，$p(p+1)/2$ 次元正規分布平均 0，共分散行列

$$(3.1)\quad \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{p}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{p(p-1)/2} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

に従う．ただし $\log S \equiv T'(\log\Lambda)T$.

証明. $U=(\Sigma^{-\frac{1}{2}}S\Sigma^{-\frac{1}{2}}-nI)/\sqrt{2n}$ とすると, U は漸近的に, $p(p+1)/2$ 次元正規分布平均 0 共分散行列 (3.1) をもつ. ところで $\Sigma=I+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ より, $\log S/n=\log(I+\frac{1}{\sqrt{n}}(\Theta+\sqrt{2}U)+O_p(n^{-1}))$ $=\frac{1}{\sqrt{n}}(\Theta+\sqrt{2}U)+O_p(n^{-1})$. かくて $Y=U+O_p(n^{-\frac{1}{2}})$.

次に $Z=\sqrt{\frac{n}{2}}\log S/n$ の分布を考える。$S=ne^{\sqrt{\frac{2}{n}}Z}$ より, Jacobian は, Jack [2] より

$$(3.2)\quad \left|\frac{\partial S}{\partial Z}\right|=(2n)^{p(p+1)/4}\operatorname{etr}\left[\sqrt{\tfrac{2}{n}}Y\right]\prod_{i>j}^{p}\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}.$$

ただし $f(\lambda_i)=e^{\lambda_i}$ で, $\lambda_i=\sqrt{\frac{2}{n}}ch_i(Z)$ である。

ここでは, 漸近展開を求めるのが目的であるから, (3.2) の後半を展開すると

$$(3.3)\quad \prod_{i>j}^{p}\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}=1+\tfrac{1}{2}(p-1)\sqrt{\tfrac{2}{n}}\operatorname{tr}Z+O(n^{-1}).$$

また $|e^A|=\operatorname{etr}A$ より Z の分布は, 次であたえられる。

$$(3.4)\quad c^*\cdot\operatorname{etr}\left[\tfrac{1}{2}(n-p+1)\sqrt{\tfrac{2}{n}}Z-\tfrac{n}{2}\Sigma^{-1}e^{\sqrt{\frac{2}{n}}Z}\right]\left[1+\tfrac{1}{2}(p-1)\sqrt{\tfrac{2}{n}}\operatorname{tr}Z+O(n^{-1})\right],$$

ただし

$$(3.5)\quad c^*=\left\{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left[\tfrac{1}{2}(n+1-j)\right]\right\}^{-1}\left(\tfrac{n}{2}\right)^{p(2n-p-1)/4}\pi^{-p(p-1)/4}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}.$$

補題 2．$p(p+1)/2\times 1$ ベクトル $(z_{11},\cdots,z_{pp},z_{12},\cdots,z_{p-1,p})'$ は，平均 0 共分散行列 $\Sigma^{*}=(\sigma_{ij,kl})$ をもつ正規分布とする。$(i,j)=a$, $(k,l)=b$, $(m,n)=c$, $(g,r)=d$, $(s,t)=e$, $(u,v)=f$ とすると，

$$(3.6)\quad E y_a y_b y_c y_d=\sigma_{ab}\sigma_{cd}+\sigma_{ac}\sigma_{bd}+\sigma_{ad}\sigma_{bc}.$$

4. 漸近展開

T_1 の特性関数は，次であたえられる。

$$(4.1)\quad C(t)=c_{p,n}\int \exp\left[(it)\frac{n}{2}\mathrm{tr}(S\Sigma_0^{-1}/n-I)^2\right]|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}S\right]dS.$$

$\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}S\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\longrightarrow S$ とすると

$$=c_{p,n}\int \exp\left[(it)\frac{n}{2}\mathrm{tr}(S/n-I)^2\right]|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma\Sigma_0^{-1}|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-1}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}S\right]dS.$$

かくて統計量 $T_1=\frac{n}{2}\mathrm{tr}(S/n-I)^2$ となり，S は，$W(\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\Sigma\Sigma_0^{-\frac{1}{2}},n)$ となる。ここで $\Sigma=\Sigma_0+n^{-\frac{1}{2}}\theta$ の下での T_1 の漸近展開を求める。すると $\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\Sigma\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}=I+n^{-\frac{1}{2}}\theta^{*}$ となる。ただし $\theta^{*}=\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\theta\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$．よって補題 1 により $Y=\sqrt{\frac{n}{2}}(\log S-\log(I+n^{-\frac{1}{2}}\theta^{*}))$ は，漸近的に正規分布であるから，T_1 を Y でもって表示すると，

$$(4.2)\quad T_1=g_0(Y)+\frac{1}{\sqrt{n}}g_1(Y)+O_p(n^{-1})$$

となる．ここで

$$(4.3)\quad \begin{aligned} g_0(Y) &= \mathrm{tr}\left(Y + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Theta^*\right)^2, \\ g_1(Y) &= \sqrt{2}\,\mathrm{tr}\left(Y + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Theta^*\right)\left\{\left(Y + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Theta^*\right)^2 - \tfrac{1}{2}\Theta^{*2}\right\}. \end{aligned}$$

よって T_1 の特性関数は，次のようになる。

$$(4.4)\quad C(t) = E\left[\exp(it\,g_0(Y))\left\{1 + \frac{it}{\sqrt{n}}g_1(Y)\right\}\right] + O(n^{-1}).$$

そこで，上の平均を求めるために，$g_0(Y)$ を $Z = \sqrt{\frac{n}{2}}\log S/n$ で，あらわし，Z の分布 (3.4) をもちいると，(4.4) の第一項は，次のようになる。

$$(4.5)\quad E[\exp(it\,g_0(Y))] = c\int \exp\left[-\tfrac{1}{2}(1-2it)\mathrm{tr}Z^2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}\Theta^* Z\right]$$
$$\cdot\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}[it-1]\mathrm{tr}\Theta^{*2}Z + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Theta^* Z^2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{tr}Z^3\right) + O(n^{-1})\right\}dZ,$$

ただし $c = c^*\cdot \mathrm{etr}\left[-\frac{n}{2}(I + n^{-\frac{1}{2}}\Theta^*)^{-1}\right]$.

ここで，exp の中を $p(p+1)/2$ 次元正規分布となるように，少し修正すると次のようになる。

$$(4.6)\quad c\cdot(2\pi)^{p(p+1)/4}\,2^{-p(p-1)/4}(1-2it)^{-\frac{f}{2}}\cdot\exp\left[\frac{1}{4}\mathrm{tr}\Theta^{*2} + \frac{it}{2(1-2it)}\mathrm{tr}\Theta^{*2}\right]$$
$$\times E\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(it-1)\mathrm{tr}\Theta^{*2}Z + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Theta^* Z^2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{tr}Z^3\right\} + O(n^{-1})\right].$$

ここで E は，Z を平均 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-2it)^{-1}\Theta^*$)，共分散行列 $\sigma_{ij,kl} = (1-2it)^{-1}\cdot(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ としたときの平均を意味する。

また $f=\frac{1}{2}p(p+1)$．よって，係数を Stirling の公式をもちいて展開し，後半を補題2をもちいて計算すると，

$$(4.7)\quad (1-2it)^{-\frac{f}{2}}\exp\left[\frac{it}{2(1-2it)}a_2\right]\left\{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left[-\frac{a_3}{12}(t)_3+\frac{1}{4}(a_3-(p+1)a_1)(t)_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}(-a_3+(p+1)a_1)(t)_1+\frac{1}{12}a_3\right]+O(n^{-1})\right\},$$

ただし $a_i=\mathrm{tr}\,\Theta^{*i}$，$(t)_\alpha=(1-2it)^{-\alpha}$．

同様に第二項も計算することにより特性関数は，次のようになる。

$$(4.8)\quad C(t)=(1-2it)^{-\frac{f}{2}}\exp\left[\frac{it}{2(1-2it)}a_2\right]\left\{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{a_3}{6}(t)_3+\frac{1}{2}(p+1)a_1(t)_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(-a_3-(p+1)a_1)(t)_1+\frac{1}{3}a_3\right]+O(n^{-1})\right\}.$$

よって上を反転することにより次の定理を得る。

定理1．$\Sigma=\Sigma_0+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で，

$$(4.9)\quad P_r(T_1\leq x)=P_f(\delta^2)+\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{a_3}{6}P_{f+6}(\delta^2)+\frac{1}{2}(p+1)a_1P_{f+4}(\delta^2)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(-a_3-(p+1)a_1)P_{f+2}(\delta^2)+\frac{1}{3}a_3P_f(\delta^2)\right\}+O(n^{-1}),$$

ただし $f=\frac{1}{2}p(p+1)$，$a_i=\mathrm{tr}(\Theta\Sigma_0^{-1})^i$，であり，$P_f(\delta^2)$ は，自由度 f である非心母数 δ^2 をもつ非心 χ^2 分布である。ただし $\delta^2=a_2/4$．

同様な方法により以下の定理を得る。

定理2．$\Sigma=\sigma^2 I+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で，

$$(4.10)\quad P_r(T_2\le x)=P_f(\delta^2)+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{\Big(\frac{1}{6}a_3-\frac{1}{2}p^{-1}a_1a_2+\frac{1}{3}p^{-2}a_1^3\Big)P_{f+6}(\delta^2)$$

$$+\Big(-\frac{1}{2}a_3+p^{-1}a_1a_2-\frac{1}{2}p^{-2}a_1^3\Big)P_{f+2}(\delta^2)+\Big(\frac{1}{3}a_3-\frac{1}{2}p^{-1}a_1a_2+\frac{1}{6}p^{-2}a_1^3\Big)$$

$$\times P_f(\delta^2)\Big\}+O(n^{-1}).$$

ただし $f=\frac{1}{2}p(p+1)-1$，$a_i=\sigma^{-2i}\mathrm{tr}\,\Theta^i$，$\delta^2=a_2/4$．

定理3．$\Sigma=\Sigma_D+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で，

$$(4.11)\quad P_r(T_3\le x)=P_f(\delta^2)+\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{6}a_3\{P_{f+6}(\delta^2)-3P_{f+2}(\delta^2)+2P_f(\delta^2)\}+O(n^{-1}).$$

ただし $f=\frac{1}{2}(p^2-\sum_{\alpha=1}^{g}p_\alpha^2)$，$a_i=\mathrm{tr}(\Theta\Sigma_D^{-1})^i$，$\delta^2=a_2/4$．

なお特に $g=2$ の場合，$n^{-\frac{1}{2}}$ の項は，0となる。またその場合に対して，Fujikoshi［1］，Lee［4］によって上は求められている。

定理4．$\Sigma_\alpha=\Sigma+n^{-\frac{1}{2}}\Theta_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,k)$ とし，$n_\alpha/n=p_\alpha$ 一定の下で，

$$(4.12)\quad P_r(T_4\le x)=P_f(\delta^2)+n^{-\frac{1}{2}}\Big\{\frac{1}{6}(\mathrm{tr}A_3)P_{f+6}(\delta^2)+\frac{1}{2}(p+1)(\mathrm{tr}E_1)P_{f+4}(\delta^2)$$

$$+\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A_3-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\hat{\Theta}A_2-\frac{1}{2}(p+1)\mathrm{tr}E_1\right\}P_{f+2}(\delta^2)+\left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}A_3+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\hat{\Theta}A_2\right)P_f(\delta^2)\Big\}$$

$$+O(n^{-1}),$$

ただし $f=\frac{1}{2}(k-1)p(p+1)$, $A_\beta=\sum_{\alpha=1}^{k}\rho_\alpha\{(\Theta_\alpha-\hat{\Theta})\Sigma^{-1}\}^\beta$, $\hat{\Theta}=\sum_{\alpha=1}^{k}\rho_\alpha\Theta_\alpha\Sigma^{-1}$,
$E_1=\sum_{\alpha=1}^{k}(\Theta_\alpha-\hat{\Theta})\Sigma^{-1}$, $\delta^2=\frac{1}{4}\mathrm{tr}A_2$.

定理5. $\Sigma=\Sigma_D+N^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で,

$$(4.13)\quad P_r(-2\log\lambda_3\leq x)=P_f(\delta^2)+\frac{N^{-\frac{1}{2}}}{6}a_3\{P_{f+4}(\delta^2)-3P_{f+2}(\delta^2)$$

$$+2P_f(\delta^2)\}+O(N^{-1}).$$

特に, $g=2$ の場合には, 上の定理は, Lee [4], Muirhead [5], Sugiura [12] によってあたえられている。

定理6. $\Sigma_\alpha=\Sigma+n^{-\frac{1}{2}}\Theta_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,k)$ とし, $n_\alpha/n=\rho_\alpha$ 一定の下で

$$(4.14)\quad P_r(-2\log\lambda_4\leq x)=P_f(\delta^2)+n^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{6}(\mathrm{tr}A_3)P_{f+4}(\delta^2)+\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A_3-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\hat{\Theta}A_2\right)\right.$$

$$\left.\times P_{f+2}(\delta^2)+\left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}A_3+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\hat{\Theta}A_2\right)P_f(\delta^2)\right\}+O(n^{-1}).$$

なお $k=2$ の場合, Sugiura [11] によって求められている。

REFERENCES

[1] Fujikoshi, Y. (1970). Asymptotic expansions of the distributions of test statistics in multivariate analysis. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. 34 73-144.

[2] Jack, H. (1964-65). Jacobians of transformations involving orthogonal matrices. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 67 81-103.

[3] John, S. (1971). Some optimal multivariate tests. Biometrika 58 123-127.

[4] Lee, Y.S. (1971). Distribution of the canonical correlations and asymptotic expansions for distributions os certain independence test statistics. Ann. Math. Statist. 42 526-537.

[5] Muirhead, R.J. (1972). On the test of independence between two sets of variates. Ann. Math. Statist. 43 1491-1497.

[6] Nagao, H. (1970). Asymptotic expansions of some test criteria for homogeneity of variances and covariance matrices from normal populations. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 34 153-247.

[7] ________ (1972). Non-null distributions of the likelihood ratio criteria for independence and equality of mean vectors and covariance matrices. Ann. Inst. Statist. Math. 24 67-79.

[8] ________ (1973). On some test criteria for covariance matrix. Ann. Statist. (To appear).

[9] Sugiura, N. (1969). Asymptotic expansions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix. Ann. Math. Statist. 40 2051-2063.

[10] ________ (1972). Locally best invariant test for sphericity and the limiting distributions. Ann. Math. Statist. 43 1312-1316.

[11] ________ (1972). Asymptotic formulas for hypergeometric function ${}_2F_1$ of matrix argument, useful in multivariate analysis. Report at the meeting of the Mathematical society of Japan.

[12] ________ (1973). Asymptotic non-null distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix under local alternatives. Ann. Statist. (To appear).